

(平成 21 年 8 月 19 日実施)

平成 22 年度

北海道大学大学院理学院 量子理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験 専門科目問題（午後）

受験に関する注意

- 試験時間： 13:00～15:30 の 2時間30分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の間が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の間を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 量子理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：**問題III, IV**を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
 - 宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは**問題III, IV**を解答すること。
 - 理論惑星科学・実験宇宙科学・惑星物理学・飛翔体観測を志望するものは**問題III, IV, V, VI**の中から2つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題III	2枚
	問題IV	1枚
	問題V	2枚
	問題VI	3枚
解答紙	2問題分	4枚（各問題2枚）
草案紙	2問題分	2枚（各問題1枚）

問題 III

問 1 軌道角運動量の演算子は $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$ と表せる。ここで $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ とする表記法を使うと角運動量の成分の交換関係は $[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar \sum_{l=1}^3 \epsilon_{jkl} \hat{L}_l$ となる。 ϵ_{jkl} は反対称テンソルで $\epsilon_{123} = 1$ とする。

1-1. $[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0$ を示せ。

このことから、角運動量の大きさと角運動量の第 3 成分は、同時に対角化でき、次のような角運動量の固有状態が定義できるものとする。

$$\hat{L}^2 |l, m\rangle = l(l+1)\hbar^2 |l, m\rangle, \quad \hat{L}_3 |l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle,$$

ここで $|l, m\rangle$ は表示依存性のない状態ベクトルを表し、例えば極座標表示ではその波動関数は球面調和関数 $Y_l^m(\theta, \phi)$ で表される。

1-2. $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2$ を定義したとき、 $\hat{L}_+ |l, m\rangle$ 及び $\hat{L}_- |l, m\rangle$ が \hat{L}^2 及び \hat{L}_3 の固有状態であることを具体的に示し、それぞれの固有値を求めよ。

1-3. 次の関係式を証明せよ。

$$\hat{L}^2 - \hat{L}_3^2 = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 = \hat{L}_- \hat{L}_+ + \hbar \hat{L}_3 = \hat{L}_+ \hat{L}_- - \hbar \hat{L}_3$$

次に、それらが成り立つことから、角運動量の固有状態 $|l, m\rangle$ の m の最大値 m_{max} 及び最小値 m_{min} は $m_{max} = l$, $m_{min} = -l$ となることを示せ。

問 2 波動関数の座標表示が次の式で与えられているものとする：

$$\psi(\mathbf{r}) = NR(r) \sum_{i=1}^3 \frac{a_i x_i}{r}$$

ここで $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ 、 a_i ($i = 1, 2, 3$) は定数で、

$$\sum_{i=1}^3 |a_i|^2 = 1$$

を満たしている。また $R(r)$ は無限遠方で振る舞いの良い関数とし、 N は規格化定数として与えられているものとする。

2-1. この波動関数の状態が \hat{L}^2 の固有状態であることを示し、固有値を求めよ。必要なら、次頁の極座標表示を用いてよい。

2-2. この波動関数が、 \hat{L}_3 の固有状態になるとき、 a_i を決定して波動関数を書き下し、それらに対応する固有値を求めよ。

次の極座標表示を用いてよい。

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = r \cos \theta$$
$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]$$
$$\hat{L}_3 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$

問 3 軌道角運動量の大きさ $l = 1$ を持つ二つの粒子が存在する。問 1 の結果を踏まえ二つの軌道角運動量の合成を行い、規格化された波動関数をすべて書き下せ。

ここで粒子 1 と粒子 2 を上付き添え字 (1),(2) で区別したとき、角運動量 $\hat{L}_j^{(a)}$ は、それぞれ問 1 で与えられた角運動量の交換関係を満たしているものとし、粒子 1,2 に対応する角運動量は交換する： $[\hat{L}_i^{(1)}, \hat{L}_j^{(2)}] = 0$ 。また問 1 で与えた状態ベクトルの表記法 $|l, m\rangle^{(a)}$ で、次のような簡略化した表記を用いてよい。

$$|1, +1\rangle^{(a)} = |+\rangle^{(a)}, \quad |1, 0\rangle^{(a)} = |0\rangle^{(a)}, \quad |1, -1\rangle^{(a)} = |-\rangle^{(a)} \quad (a = 1, 2),$$

また合成系に対しては、

$$|+\rangle^{(1)}|+\rangle^{(2)} = |+, +\rangle, \quad |+\rangle^{(1)}|0\rangle^{(2)} = |+, 0\rangle, \quad |+\rangle^{(1)}|-\rangle^{(2)} = |+, -\rangle \dots$$

と表す。

問題 IV

気体の定積熱容量 C_V と定圧熱容量 C_P について考える。エントロピーを S , 温度を T , 圧力を P , 体積を V とし、それぞれ $C_V \equiv T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V$, $C_P \equiv T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P$ と定義される。温度変化に際して粒子数 N は一定に保たれるものとし、以下においても、偏微分における粒子数一定を表す下付き添え字 N は省略してよい。Boltzmann 定数を k_B , Planck 定数を h と表すことにする。

問 1 まず、熱力学の方法論を用いて考察しよう。

1-1. エントロピーを温度、圧力の関数 $S(T, P)$ と考えて、全微分 dS を dT, dP を用いて表せ。

1-2. 圧力を温度、体積の関数 $P(T, V)$ と考えて、全微分 dP を dT, dV を用いて表せ。

1-3. Gibbs の自由エネルギーを微分して得られる Maxwell の関係式を用いることにより、 $\left(\frac{\partial S}{\partial P} \right)_T$ を S を用いない T, P, V 間の偏微分の形に表せ。

1-4. エントロピーは圧力を介した温度、体積の関数、すなわち $S(T, P(T, V))$ と考えられる。これを考慮して C_V と C_P の関係を T, P, V 及びその間の偏微分を用いて表せ。

1-5. $PV = Nk_B T$ を満たす理想気体について、 C_V と C_P の関係を与えよ。

1-6. $\left(P + \frac{aN^2}{V^2} \right) (V - bN) = Nk_B T$ を満たす van der Waals 気体について、 C_V と C_P の関係を与えよ。ここに a, b は正の定数とする。

1-7. $C_P - C_V$ の値は一般に正負いずれであるか。またその絶対値は理想気体と van der Waals 気体でどちらが大きいだろうか。理由を付して述べよ。

問 2 次に、統計力学の方法論を用いて考察しよう。質量 m の単原子 N 個からなる理想古典気体を考える。

2-1. 温度 T , 体積 V のもとで正準分布を適用し、分配関数 $Z(T, V, N)$ を求めよ。

2-2. 温度 T , 圧力 P のもとで大正準 $T-p$ 分布を適用し、大分配関数 $Y(T, P, N)$ を求めよ。

2-3. Helmholtz の自由エネルギー $F(T, V, N) = -k_B T \ln Z(T, V, N)$ から定積熱容量 C_V を、Gibbs の自由エネルギー $G(T, P, N) = -k_B T \ln Y(T, P, N)$ から定圧熱容量 C_P を、それぞれ求めよ。

問題 V

問 1 以下の設問に答えなさい。

1-1. 以下のものを求めなさい。

(1) $\frac{dy}{dx} + (\tan x + 2x)y = 0$ の一般解。

(2) 1 の 3 乗根。

(3) 2 次までのテーラー展開式を利用した場合の $(1.01)^{10}$ の値。

1-2. 複素数に関する以下の設問に答えなさい。ただし、 $0 < |c| < 1$ とする。

(1) 複素平面内の単位円内における以下の複素関数の極とその極における留数を求めなさい。

$$\frac{i}{c(z-c)(z-c^{-1})}$$

(2) 前問の結果を利用して以下の積分値を求めなさい。

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2c \cos \theta + c^2}$$

1-3. 3 次元直交直線座標系 (x, y, z) におけるベクトル場 $\mathbf{v} = (-ay, ax, 0)$ について考える。 a を正の実定数として以下の設問に答えなさい。

(1) (x, y) 平面におけるベクトル場の様子を図示しなさい。

(2) $\nabla \times \mathbf{v}$ を求めなさい。

(3) 閉曲面上の面積分 $\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$ の値を求めなさい。ここで、 S は原点を中心とする半径 1 の球面、 \mathbf{n} は S 面上における外向き法線単位ベクトルである。

問 2 以下の連立微分方程式を考える。

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = M \mathbf{x} \tag{1}$$

ただし、 M は 2×2 の正方行列であり、

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

とする。また、 \mathbf{x} は t の関数である 2 次元列ベクトル

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

とする。

2-1. 行列 M の固有値と固有ベクトルを求めなさい。

- 2-2.** 前問 **2-1** で得られた固有ベクトルを列としてならべた行列を T とし、 T の逆行列を用いた座標変換 $\mathbf{x}' = T^{-1}\mathbf{x}$ を考える。 \mathbf{x}' が満たす微分方程式を求めなさい。
- 2-3.** 前問 **2-2** で求めた \mathbf{x}' の微分方程式の一般解を求めなさい。更にその結果を使ってもとの微分方程式 (1) の一般解を求めなさい。
- 2-4.** 初期条件が

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

である場合の解を求めなさい。

- 2-5.** 前問 **2-4** で求めた $x_1(t)$ および $x_2(t)$ の時間変化を表すグラフの概略を図示しなさい。必要に応じ、 $\ln 2 = 0.7$ を利用してよい。

問題 VI

問1から問3のうち、問1に必ず解答し、また問2と問3のうちいずれかを選択して解答せよ。

問1 (必答) 次の問い 1-1 から 1-3 に答えよ。

- 1-1. 宇宙において、もっとも多数存在している元素を4つ挙げよ。また、地球において、もっとも多数存在している元素を4つ挙げよ。宇宙と地球の間でそのように元素組成が異なる理由を述べよ。
- 1-2. 図1は地球、月、火星、金星のそれぞれの全球地形について高度頻度分布を表したものである。他の天体と比較したときの地球の高度分布の特徴について、そのような特徴が生じた理由も合わせて述べよ。
- 1-3. ハワイ島の東部に位置する都市ヒロは雨が多いのに対し、西部に位置する都市コナは雨が少なくヒロより温暖である。ヒロとコナの気候にこのような違いが現れる理由を、地球の大気循環の特徴と関連づけて述べよ。

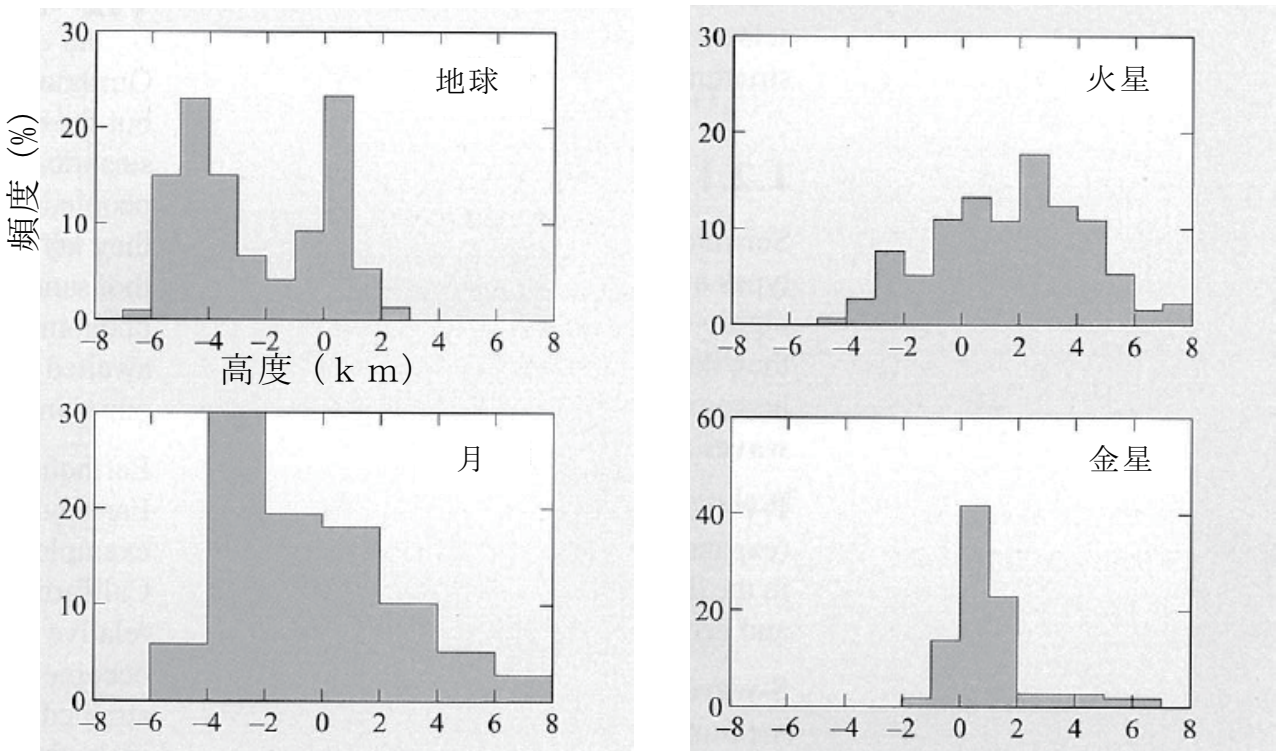


図1

問 2 (選択) 太陽系の年代学に関する以下の問い 2-1 から 2-4 に答えよ。

- 2-1. 放射性核種は時間 t の経過とともに娘核種に壊変する。閉鎖系を仮定すると、物質中の放射性核種の存在度は $e^{-\lambda t}$ に比例して減少する。 λ を壊変定数という。 λ を用いて半減期 $T_{1/2}$ を表せ。
- 2-2. 太陽系で形成された最古の物質は炭素質隕石中の包有物から見出されている。その年代測定には Pb-Pb 法が適用されている。これは $^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$ および $^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$ の壊変を用いる方法である。Pb 同位体比 $^{206}\text{Pb}/^{207}\text{Pb}$ の測定値 r から包有物の形成年代 t を求めるための、 r と t の関係式を導け。ただし包有物には、その形成時には Pb が全く含まれていなかったと仮定する。また $^{238}\text{U} \rightarrow ^{206}\text{Pb}$ の壊変定数を λ_{238} 、 $^{235}\text{U} \rightarrow ^{207}\text{Pb}$ の壊変定数を λ_{235} 、現在の U 同位体比 $^{238}\text{U}/^{235}\text{U}$ を R とする。
- 2-3. 太陽系の初期に生まれた物質について相対年代を求めるために、消滅核種を用いる方法がしばしば用いられている。半減期が 73 万年の $^{26}\text{Al} \rightarrow ^{26}\text{Mg}$ の放射壊変を用いる Al-Mg 法はその代表例である。いま隕石中の 2 つの包有物 A および B について、それぞれの包有物に含まれる様々な鉱物について $^{27}\text{Al}/^{24}\text{Mg}$ 比と $^{26}\text{Mg}/^{24}\text{Mg}$ 比を測定したところ、図 2 のように直線上に並んだ測定点を得られた。包有物 A と包有物 B はどちらが先に形成したと考えられるか、推定される形成年代差の値と合わせて答えよ。
- 2-4. 物質が入手できない惑星や衛星の大規模地形の形成年代を推定する方法について説明せよ。

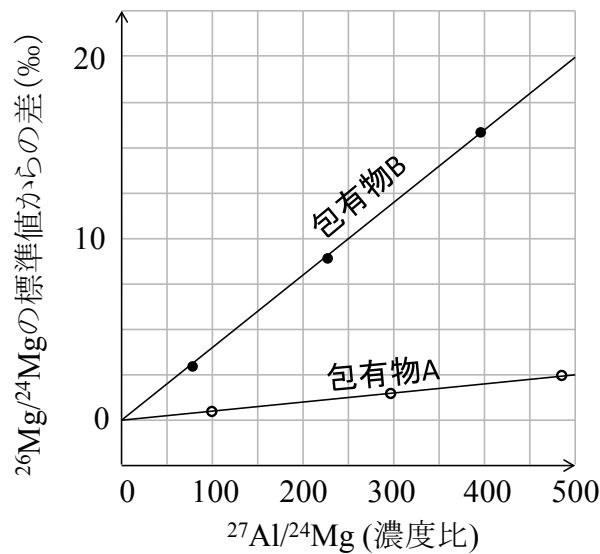


図2 $^{27}\text{Al}/^{24}\text{Mg}$ 比と $^{26}\text{Mg}/^{24}\text{Mg}$ 比の関係。

問 3 (選択) 月は地球からすこしずつ遠ざかっている。これは次のような仕組みに起因している。まず月が地球に及ぼす潮汐力によって、模式図 (図 3a) に示すように地球に膨らみ (潮汐バルジ) が生じる。地球の自転速度が月の公転速度よりも速いために、膨らみの方向が地球の中心と月を結ぶ線よりもわずかにずれる。この膨らみの質量が月におよぼす万有引力によって、月は公転方向に加速され、軌道半径が大きくなる。以下の問い 3-1 から 3-5 に答えよ。

- 3-1. 月の潮汐力によって、地球に月の方向だけでなく、月の反対方向にも膨らみができる理由について適宜図を示しながら定性的に説明せよ。
- 3-2. 潮汐バルジの及ぼす万有引力が月を公転方向に加速することを理解するために、潮汐バルジの質量を、地球表面に置いた 2 つの質量 m の質点で表して力の大きさと向きを評価することにしよう。質点間を結ぶ線分が地球中心と月を結ぶ線分となす角を θ 、地球中心から月までの距離を R 、地球半径を r 、月質量を M_M 、万有引力定数を G として、2 つの質点が月に及ぼす万有引力の合力の公転方向成分 (図 3(b) の y 軸方向の成分) を表し符号が正であることを確かめよ。ただし θ は十分小さく $\cos \theta \simeq 1$ 、 $\sin \theta \simeq \theta$ と近似できるものとする。また $r \ll R$ であるので、月から見た地球中心とそれぞれの質点のなす角度 ϕ は $\phi = (r/R)\theta$ と近似できる。
- 3-3. 月の公転運動の角運動量 L_M に対する地球の自転角運動量 L_E の比 L_E/L_M を、地球質量 M_E 、月質量 M_M 、地球の自転周期 T_E 、月の公転周期 T_M 、地球半径 r 、月の公転半径 R を用いて表せ。地球は一様球と仮定し、その慣性能率は $\frac{2}{5}M_E r^2$ で与えられるものとする。
- 3-4. 現在の月の公転半径は地球半径の 60 倍、公転周期は 27 日、月と地球の質量比は 1:80 である。これらを用いて現在の L_E/L_M を概算し有効数字 2 桁で示せ。
- 3-5. 将来、月は地球から無限に離れることはないと考えられる。それはなぜか述べよ。

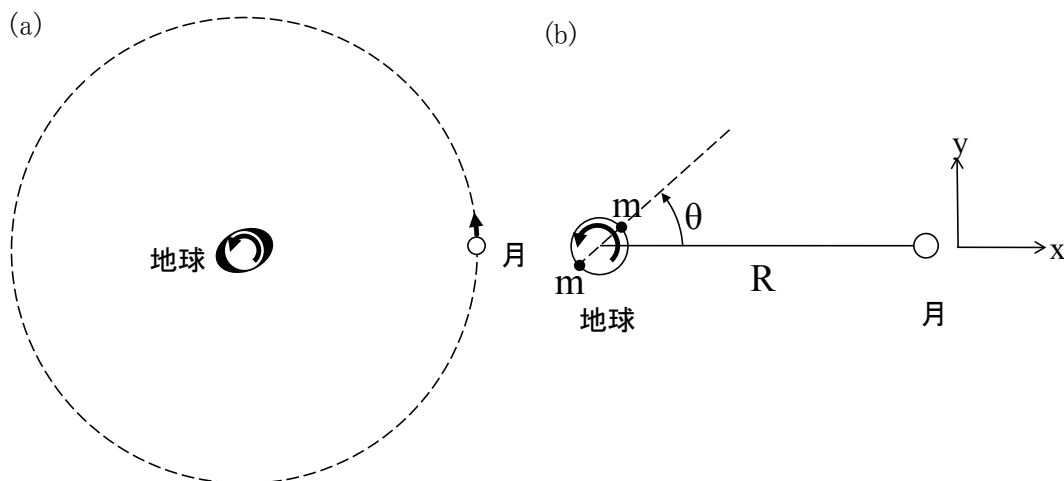


図3