（平成 22 年 8 月 18 日実施）

平成 **23** 年度

北海道大学大学院理学院　物性物理学専攻・宇宙理学専攻
修士（博士前期）課程入学試験　専門科目問題（午前）

受験に関する注意

- 試験時間：　9:00〜11:30 の 2 時間 30 分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者・宇宙理学専攻志望者とも問題 **I, II** を解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子	問題 I	2 枚
	問題 II	2 枚
解答紙	問題 I, II	4 枚（各問題 2 枚）
草案紙	問題 I, II	2 枚（各問題 1 枚）

問題 I

問 1 直線 3 原子分子の 1 次元運動を、図 1 のように、同じ質量 m をもつ 3 つの質点が、質量の無視できるばね (ばね定数 k, 自然長 l) でつながれている模型で考える。床との摩擦は無視でき、質点の運動は x 軸上に限られているとする。各質点の座標を x_1, x_2, x_3 とし、以下の問に答えよ。

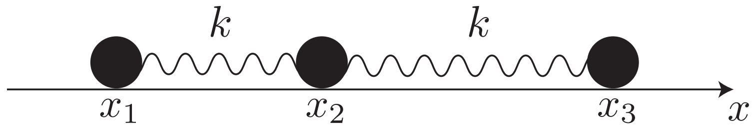


図 1

1-1. 系の全エネルギーを、x_1, x_2, x_3 とそれらの時間微分 $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$ を用いて表せ。

1-2. x_1, x_2, x_3 に対する運動方程式を求めよ。また x_1, x_3 を l だけ平行移動した座標

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + l \\ x_2 \\ x_3 - l \end{pmatrix}$$

を導入すると、運動方程式は対称行列 A を用いて次のように書くことが出来る。

$$\ddot{\boldsymbol{y}} = -\omega_0^2 A \boldsymbol{y}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ここで $\ddot{\boldsymbol{y}}$ は $\boldsymbol{y}$ の時間による 2 階微分である。行列 A を具体的に求めよ。

1-3. 行列 A の固有値を、値の小さいものから順に a_1, a_2, a_3 とし、対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ とする。固有ベクトルを列とする行列 $V = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3)$ を導入し、その逆行列 V^{-1} を用いて新しい座標

$$\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = V^{-1} \boldsymbol{y}$$

を定義する。q_1, q_2, q_3 に対する運動方程式を a_1, a_2, a_3 を用いて表せ。また、実際に行列 A の固有値を求め、q_2, q_3 の角振動数を求めよ。

1-4. 行列 A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ を求め、q_1, q_2, q_3 と x_1, x_2, x_3 の関係式を示せ。また、q_1, q_2, q_3 はそれぞれ、どの様な質点の運動に対応するか述べよ (図を使ってもよい)。

問 2 太陽系外から飛来する質量 m を持つ質点の運動を、次のような模型で考える。まず、太陽は常に座標原点 O にあり、質量 M を持つとする。従って質点は、太陽による中心力ポテンシャル $V(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$ ($\alpha = GMm$、G は万有引力定数) 中を運動すると見なせる。また、角運動量ベクトルが保存するため、その向きを z 軸とすると、質点は x-y 平面内を運動する。質点は無限遠から x 軸に平行に飛来し、無限遠で座標 $(\infty, b, 0)$、 速度 $(-v_0, 0, 0)$ であったとする (b, v_0 は正の定数)。このとき、質点は図 2 の様に近日点 P で太陽に最も接近した後、飛び去る。以下の様にして、太陽から近日点 P までの距離を求めよ。

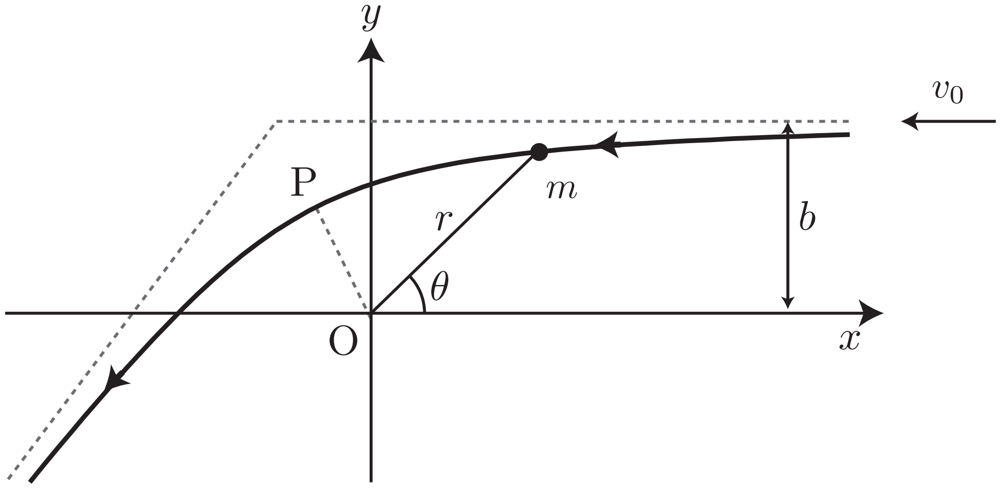


図 2

2-1. 無限遠での座標と速度を用い、質点のエネルギー E と角運動量の大きさ l を m, b, v_0 を用いて表せ。

2-2. 質点の角運動量を 2 次元極座標で表せ。r, θ は図 2 に示したように定義する。また、前問の結果と比較し、角速度 $\dot{\theta}$ を r, b, v_0 を用いて表わせ。

2-3. 質点の全エネルギーを 2 次元極座標で表わすと、

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U(r)$$

の様に動径方向の運動エネルギーと、有効ポテンシャル $U(r)$ の和として書ける。ここで、$\dot{r}$ は r の時間微分を表わす。具体的な $U(r)$ の表式を m, r, l, α を用いて示せ。また、その概形を r の関数として図示せよ。

2-4. ここまでの結果を用い、太陽から近日点 P までの距離を m, b, v_0, α を用いて表わせ。また近日点 P での質点の速度の大きさを求めよ。

問題 II

以下の問題では電磁場を SI 単位系で表すことにする。設問はすべて空気中での現象に関するもので、空気の誘電率と透磁率はそれぞれ真空の誘電率 ε_0 と透磁率 μ_0 で近似できるものとする。3 次元空間の位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y, z)$、その大きさを r で表し、a を正の定数とする。

問 1 以下の問いに答えよ。

1-1. 3 次元空間の原点に電荷 $q > 0$ をもつ点電荷が存在する。この点電荷が位置 $\vec{r}$ に作る電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

1-2. **1-1** の電場 $\vec{E}(\vec{r})$ の xy 平面内における概形を電気力線で表せ。

1-3. **1-1** の電場の下で、電荷 q を持つもう一つの点電荷を、無限遠方から位置 $\vec{r}$ まで持ってくるのに必要な仕事 W を求めよ。

1-4. 点 $\vec{a}/2 \equiv (a/2, 0, 0)$ と $-\vec{a}/2$ にそれぞれ電荷 q と $-q$ をもつ点電荷が存在している。この時、点 $\vec{r}$ における電場 $\vec{E}(\vec{r})$ の表式を書き下せ。

1-5. **1-4** の電場 $\vec{E}(\vec{r})$ の概形を電気力線を用いて表せ。

1-6. **1-4** において、$r \gg a$ なる点 $\vec{r}$ における電場を、電気双極子モーメント $\vec{p} \equiv q\vec{a}$ を用いて近似的に表せ。なお、一般に x の関数 $f(x) \equiv (1 + x)^\nu$ は、$|x| \ll 1$ のとき、$f(x) \approx 1 + \nu x$ と近似できる。

問 2 以下の問いに答えよ。

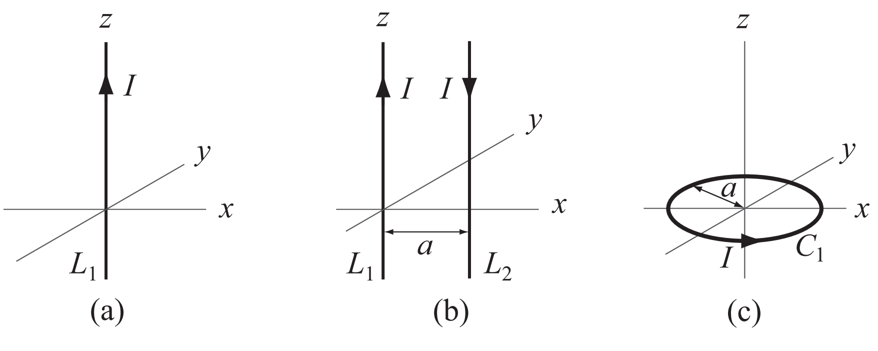


図 1

2-1. 図 1(a) のように、z 軸上に伸びた細い導線 L_1 内を、$z = -\infty$ から $+\infty$ の方向に定常電流 $I > 0$ が流れている。磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})$ の xy 平面内における概形 (z 軸の正の方向から見た図) を磁力線で表せ。

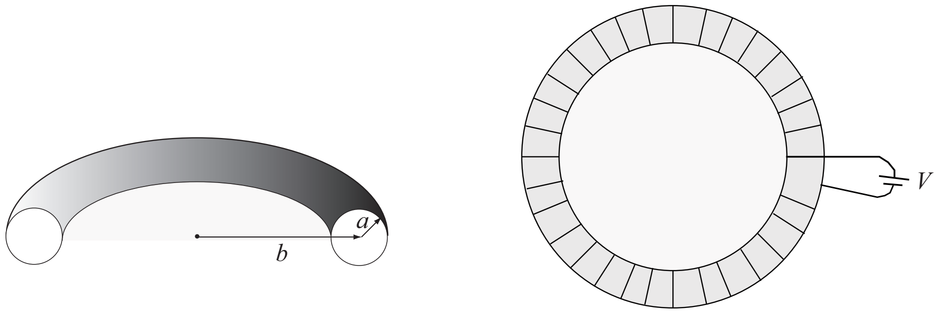
2-2. 図 1(a) の状況で、xy 平面内の点 $\vec{r}$ における磁束密度の大きさ $B(r)$ を求めよ。

2-3. 図 1(b) のように、$(a, 0, z)$ $(-\infty < z < \infty)$ で表される z 軸に平行な直線上にもう一つの導線 L_2 を配置し、$z = +\infty$ から $-\infty$ の方向 に定常電流 I を流した。導線 L_2 が受ける単位長さ当りの力（アンペールの力）の大きさと方向を求めよ。

2-4. **2-3** の状況で生じる磁束密度 $\vec{B}(\vec{r})$ の xy 平面内における概形 (z 軸の正の方向から見た図) を磁力線で表せ。

2-5. 図 1(c) のように、$(a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$ で表される xy 平面内の円周上に導線 C_1 を配置して、定常電流 I を θ が増大する方向に流した。このとき、点 $(0, 0, z)$ における磁束密度の大きさを、ビオ・サバールの法則あるいはマクスウェル方程式を用いて求めよ。

問 3 図 2(a) のように、半径 a の断面と中心部からの半径 b を持つドーナツ型の鉄芯がある ($b \gg a$)。図 2(b) のように、その周りに絶縁被覆した導線を一様に N 回巻いた ($N \gg 1$)。鉄の透磁率を μ として以下の問いに答えよ。



(a) ドーナツ型鉄芯の断面　　(b) ドーナツ型コイル

図 2

3-1. 導線内に電流 I が流れている場合に、鉄芯内部の中心にできる磁束密度の大きさ B は電流 I に比例し、$B = \gamma I$ と書ける。比例定数 γ を求めよ。

3-2. 電流が $I = I(t)$ と時間 t に依存する場合に、コイルに生じる全誘導起電力 ϕ を求めよ。ただし、$b \gg a$ の場合、鉄芯内部で B は一様とみなせる。解答には γ を用いてもよい。

3-3. 電流の流れていなかったドーナツ型コイルの両端に、時刻 $t = 0$ において一定電圧 V を加え、それ以降、電圧 V を維持した。コイルではオームの法則が成り立ち、その全抵抗は R であるとして、$t \geq 0$ においてコイルに流れる電流 $I(t)$ の表式を求め、その概形をグラフに描け。