

(令和2年8月22日実施)

## 令和3年度

### 北海道大学大学院理学院 物性物理学専攻・宇宙理学専攻 修士（博士前期）課程入学試験 専門科目問題（午後）

#### 受験に関する注意

- 試験時間： 13:00～15:30 の2時間30分
- 解答紙、草案紙ともに受験番号を記入する。氏名は記入しない。
- 解答の際、途中の問が解けないときも問題文に記されている結果等を使ってそれ以降の問を解いてよい。
- 試験終了後、解答紙、草案紙ともすべて提出する。
- 物性物理学専攻志望者（宇宙理学専攻を併願する者を含む）：問題 III, IV を解答すること。
- 宇宙理学専攻志望者：
  - － 観測天文学・理論宇宙物理学・素粒子論・原子核理論・情報メディア科学・原子核反応データ科学を志望するものは問題 III, IV を解答すること。
  - － 惑星宇宙グループ・宇宙物質科学グループ・相転移ダイナミクス・飛翔体観測を志望するものは問題 III, IV, V, VI, VII の中から2つの問題を選択して解答すること。
- 配布するものは

専門科目問題冊子 問題 III 4枚 (A4)

問題 IV 3枚 (A4)

問題 V 2枚 (A4)

問題 VI 4枚 (A4)

問題 VII 3枚 (A4)

解答紙 2問題分 6枚 (B4) (各問題3枚)

草案紙 2問題分 2枚 (B4) (各問題1枚)

## 問題 III

問 1 質量  $m$ 、振動数  $\omega$  の 1 次元調和振動子のハミルトニアンは  $H_0 = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2$  で与えられる。 $q$  と  $p$  はそれぞれ、座標と運動量の演算子である。

1-1. 昇降演算子  $a$  と  $a^\dagger$  を次のように定義する。

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q + \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}p,$$
$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}q - \frac{i}{\sqrt{2m\omega\hbar}}p.$$

$[a, a^\dagger] = 1$  を示せ。

1-2. ハミルトニアン  $H_0$  を  $q$  と  $p$  の代わりに  $a$  と  $a^\dagger$  で表せ。

1-3. 状態  $|0\rangle$  を  $a|0\rangle = 0$ 、 $\langle 0|0\rangle = 1$  で定義する。状態  $|n\rangle = \mathcal{N}_n(a^\dagger)^n|0\rangle$  ( $\mathcal{N}_n$  は定数、 $n = 0, 1, 2, \dots$ ) が  $H_0$  の固有状態であることを示し、また  $|n\rangle$  のエネルギー固有値  $E_n$  と  $\langle n|n\rangle = 1$  となるように決定した規格化定数  $\mathcal{N}_n$  を求めよ。

次に、上の調和振動子のハミルトニアンに、外から時間的に変化する摂動  $V(t) = f(t)q$  を加える。ただし、

$$f(t) = \frac{\lambda}{t^2 + \tau^2} \quad (1)$$

であり、 $\lambda$  と  $\tau$  は実定数である。

1-4. 状態  $|\psi(t)\rangle$  がハミルトニアン  $H = H_0 + V(t)$  のシュレーディンガー方程式の解であるとする。状態  $|\varphi(t)\rangle$  を  $|\varphi(t)\rangle = e^{(i/\hbar)H_0 t}|\psi(t)\rangle$  で定義するとき、 $|\varphi(t)\rangle$  が満たす微分方程式は次の形になる。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\varphi(t)\rangle = U(t) |\varphi(t)\rangle \quad (2)$$

相互作用表示の摂動ハミルトニアン  $U(t)$  を昇降演算子  $a$  と  $a^\dagger$  を使って表せ。ただし、以下の式を使ってよい。

$$e^{\beta a^\dagger a} a^\dagger e^{-\beta a^\dagger a} = e^\beta a^\dagger \quad (\beta \text{ は定数}) \quad (3)$$

1-5. 時刻  $t = -\infty$  に、系はある状態  $|\varphi(-\infty)\rangle$  にあった。時刻  $t = +\infty$  の状態  $|\varphi(+\infty)\rangle$  は、

$$|\varphi(+\infty)\rangle = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt U(t)\right] |\varphi(-\infty)\rangle \quad (4)$$

と表せる。ここで、時間についての積分を実行すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt U(t) = \hbar A(a + a^\dagger) \quad (5)$$

の形に表すことができる。この定数  $A$  を求めよ。

**1-6.** 初期状態を  $|\varphi(-\infty)\rangle = |0\rangle$  とする。演算子  $X, Y$  の交換子  $[X, Y]$  が  $c$  数であるとき、

$$e^{X+Y} = e^Y e^X e^{\frac{1}{2}[X, Y]} \quad (6)$$

と変形できることを使って、 $|\varphi(+\infty)\rangle$  を完全系  $\{|n\rangle, n = 0, 1, \dots\}$  で展開し、

$$|\varphi(+\infty)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle \quad (7)$$

と表すことにする。このとき、展開係数  $c_n$  を定数  $A$  を使って表せ。また、状態  $|n\rangle$  への遷移確率  $P_n$  も定数  $A$  を使って表せ。

問 2 質量  $m$  の質点が一次元ポテンシャル  $V(x)$  中を運動している。  $V(x)$  は図 1 のように  $x \rightarrow \pm\infty$  で  $V(x) \rightarrow 0$  となる。

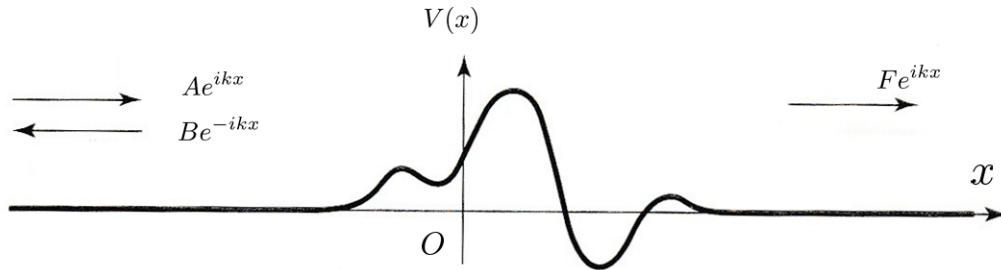


図 1

2-1. 波動関数を  $\psi(x, t)$  とする。確率の流れの密度

$$j(x, t) = -i \frac{\hbar}{2m} [\psi^* \frac{\partial}{\partial x} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial x} \psi^*] \quad (8)$$

が、以下の連続の方程式を満たすことを示せ。

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

ここで、 $\rho(x, t)$  は確率密度であり、 $\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$  と与えられる。

2-2. 図 1 のように粒子が  $x = -\infty$  からポテンシャルの領域に入り、その一部が反射され、残りが透過する問題を考える。波動関数が  $x \rightarrow \pm\infty$  で次のようにふるまうとき、粒子の反射率  $R$  と透過率  $T$  を  $A$ 、 $B$ 、 $F$  を用いて表せ。

$$\psi(x, t) \rightarrow (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})e^{-iEt/\hbar}, \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (10)$$

$$\psi(x, t) \rightarrow Fe^{ikx}e^{-iEt/\hbar}, \quad (x \rightarrow +\infty) \quad (11)$$

$A$ 、 $B$ 、 $F$  は定数であり、波数は  $k$ 、エネルギーは  $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$  で表される。

次に、図2のように、ポテンシャルが

$$V(x) = -V_0 \quad (0 < x < \ell) \quad (12)$$

$$V(x) = 0 \quad (x < 0, x > \ell) \quad (13)$$

で与えられるとき、以下の問いに答えよ。ここで、 $V_0$  は正の定数である。

**2-3.** 波動関数を

$$\psi(x, t) = (Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x})e^{-iEt/\hbar}, \quad (x < 0) \quad (14)$$

$$\psi(x, t) = (Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x})e^{-iEt/\hbar}, \quad (0 < x < \ell) \quad (15)$$

$$\psi(x, t) = Fe^{ik_1x}e^{-iEt/\hbar}, \quad (x > \ell) \quad (16)$$

と置く。ただし、エネルギー  $E > 0$ 、波数  $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$ 、波数  $k_2 = \sqrt{2m(E + V_0)}/\hbar$  であり、また  $A, B, C, D, F$  は定数である。

波動関数  $\psi(x, t)$  とその1階微分  $\frac{\partial}{\partial x}\psi(x, t)$  は  $x = 0$  と  $x = \ell$  で連続でなければならないが、その理由を説明せよ。

**2-4.**  $x = 0, \ell$  における波動関数の接続条件より、このポテンシャルによる反射率  $R$  を計算せよ。

**2-5.** 粒子が反射されない場合のエネルギー  $E$  の値を全て求めよ。

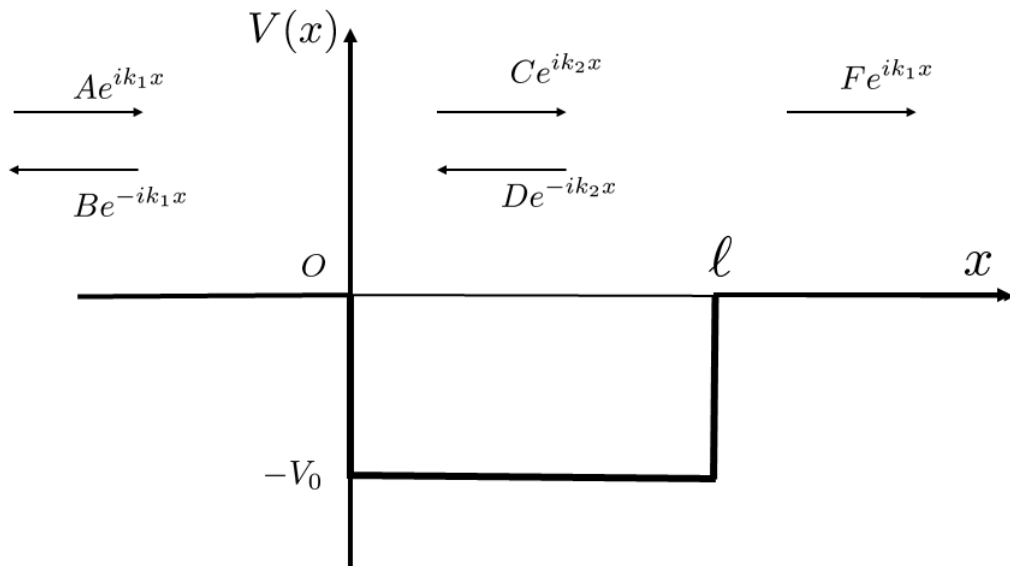


図2

## 問題 IV

問 1 体積  $V$  の容器内に質量  $m$  の同種単原子分子  $N$  ( $\gg 1$ ) 個からなる理想気体が閉じ込められており、温度  $T$  の熱平衡状態にある。この系のハミルトニアン  $\mathcal{H}$  は、 $\vec{p}_i$  を分子  $i$  の運動量として、

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m}$$

で与えられる。この系を古典統計力学で扱いカノニカル分布の方法を用いて以下の設問に答えよ。ただし、Boltzmann 定数は  $k_B$ 、Planck 定数は  $h$  とし、計算に必要ななら、

$$\text{Stirling の公式} \quad \log N! = N \log N - N \quad (N \gg 1)$$

$$\text{積分公式} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (\alpha > 0)$$

を用いてよい。

- 1-1. この気体の分配関数  $Z(N, T, V)$  を求め、Helmholtz の自由エネルギー  $F(N, T, V)$  を計算せよ。
- 1-2. この気体の内部エネルギー  $U(N, T, V)$  を求めよ。
- 1-3. この気体の圧力  $P(N, T, V)$  を求めよ。
- 1-4. この気体のエントロピー  $S(N, T, V)$  を求め、示量変数であることを示せ。

問 2 全部で  $N$  個の格子点をもつ周期境界条件を課した規則格子に Ising スピン  $S_i = \pm 1$  ( $i = 1, \dots, N$ ) が置かれている。全ての格子点はそれぞれ  $z$  個の最隣接格子点を持ち、各スピンは最隣接格子点上のスピンのみ相互作用するものとする (図 1)。スピン 1 個の磁気モーメントの大きさを  $m$  とし、この系に磁場  $H$  が印加されているとすると、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -J \sum_{(i,j)} S_i S_j - mH \sum_{i=1}^N S_i \quad [J \text{ は正の定数で } (i,j) \text{ は最隣接格子点のペア}]$$

で与えられる。この系が温度  $T$  の平衡状態にあるとして、平均場近似を適用する。この近似では 1 つのスピン  $S_i$  だけに着目し、その  $z$  個の最隣接スピン  $S_j$  をすべて同じ値の平均値  $\langle S \rangle$  で置き換える (図 2)。 $i$  番目のスピン  $S_i$  とそのまわりのスピンの相互作用だけを考慮した近似ハミルトニアン  $\mathcal{H}_i$  は

$$\mathcal{H}_i = -zJ\langle S \rangle S_i - mH S_i$$

と書くことができる。このとき、以下の問に答えよ。ただし、Boltzmann 定数を  $k_B$  として  $\beta = 1/k_B T$  であり、 $x$  が小さいとき  $\tanh x \simeq x - x^3/3$  と近似されることを使ってよい。

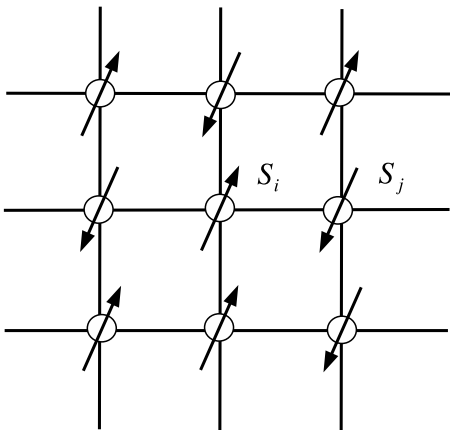


図 1

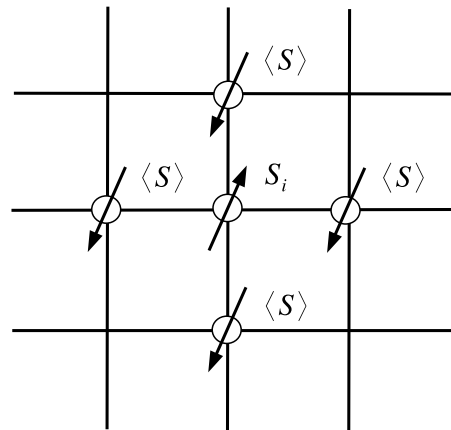


図 2

2-1.  $\mathcal{H}_i$  に対し分配関数  $Z_i$  を計算せよ。

2-2.  $Z_i$  から  $S_i$  の平均値  $\langle S_i \rangle$  を計算せよ。平均場近似では  $\langle S_i \rangle = \langle S \rangle$  が成立すると仮定する。このとき、 $\langle S \rangle$  が方程式

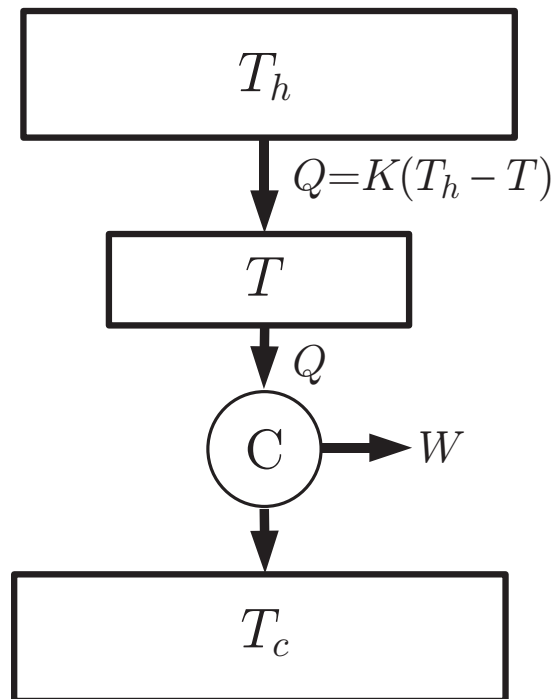
$$\langle S \rangle = \tanh [\beta(zJ\langle S \rangle + mH)]$$

を満たすことを導け。

2-3. この系を強磁性体のモデルとして考えるとき、 $H = 0$  のときに上の方程式に  $\langle S \rangle \neq 0$  の解が存在することは、自発磁化の発生を意味する。このことから、自発磁化の現れる転移温度  $T_c$  を求め、 $\langle S \rangle$  を温度  $T$  の関数として図示せよ。

2-4.  $H = 0$  かつ、 $T$  が  $T_c$  付近で  $T < T_c$  のとき、 $\langle S \rangle \simeq A\sqrt{T_c - T}$  の形に書けると仮定して、定数  $A$  を求めよ。

問 3 下図のような温度  $T_h$  と  $T_c$  ( $< T_h$ ) の2つの熱浴の間で動作する熱機関 C を考える。この熱機関は準静的ではなく、有限時間で1サイクル動作するものとする。また、この熱機関には温度  $T$  の中間的な熱溜めがあり、単位時間に、高温熱浴から熱溜めに  $Q = K(T_h - T)$  ( $K$  は温度によらない正の定数) の熱が流れる。1サイクルにかかる時間は単位時間に比べて十分に短く、熱機関が定常的に熱を仕事に変換しているように扱って、熱溜めの状態も変化しないものとする。単位時間に熱溜めから熱機関 C に流れる熱も  $Q$  となる。熱機関 C は準静的ではないものの効率  $\eta$  は非常によく、熱溜めと低温熱浴の間ではカルノー効率  $\eta = 1 - \frac{T_c}{T}$  で動作していると近似できるとする。



3-1. 熱機関 C が単位時間に外部にする仕事  $W$  を  $K, T_h, T_c, T$  を用いて表わせ。

3-2.  $W$  を最大にする熱溜めの温度  $T$  を求め、そのときの熱機関 C の効率  $\eta$  が

$$\eta = 1 - \sqrt{\frac{T_c}{T_h}}$$

と書けることを示せ。



## 問題 V

以下の問に答えよ。解答にあたっては結果だけでなく、導出過程についても記すこと。

**問 1** 以下の問に答えよ。

1-1. 以下の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

1-2. 微分方程式  $\frac{d^2y}{dx^2} - 3y = -4\sin x$  の一般解を求めよ。

1-3.  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  を求めよ。

**問 2**  $i, j, k$  をそれぞれ  $x, y, z$  方向の単位ベクトル、 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  を位置ベクトル、 $r = |\mathbf{r}|$ 、 $f(r)$  を微分可能なスカラー関数とする。このとき、以下の問に答えよ。

2-1.  $\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r}) = r \frac{df}{dr} + 3f$  となることを示せ。

2-2.  $\nabla \times (f(r)\mathbf{r}) = (0, 0, 0)$  となることを示せ。

**問 3** 区間  $-\pi \leq x \leq \pi$  において区分的に滑らかな関数  $f(x)$  のフーリエ級数展開は

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

と表され、展開係数は

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

で与えられる。このとき、以下の問に答えよ。

**3-1.** 式 (1) と (2) を三角関数の加法定理を用いて証明せよ。

**3-2.** 以下の関数をフーリエ級数展開せよ。

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x \leq 0) \\ x & (0 \leq x < \pi) \end{cases}$$

**3-3.** 3-2 の結果を用いて、以下の等式を示せ。

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$

## 問題 VI

問 1 以下の問に答えよ。

- 1-1. 惑星表面の放射平衡温度  $T_e$  は、惑星に吸収される太陽放射エネルギーと惑星が射出する黒体放射エネルギーを等しいとおくことによって推定される。惑星の軌道上における太陽放射を  $F$ 、惑星のアルベドを  $A$ 、ステファン・ボルツマン定数を  $\sigma$  とし、惑星表面の放射平衡温度  $T_e$  を求めよ。
- 1-2. 惑星の大気には、その惑星の重力が作用する。図 1 に示すように、大気中に単位面積を底とする鉛直な気柱をとり、高さ  $z$  とそれより少し高い  $z + dz$  との間に挟まれた直方体を考える。高さ  $z$  の水平面に働く圧力を  $p$ 、高さ  $z + dz$  の水平面に働く圧力を  $p + dp$  とする。大気が静止している時、この直方体に働くつり合いの式を立て、直方体内の大気密度  $\rho$ 、重力加速度  $g$ 、 $dz$  を用いて  $dp$  を表せ。

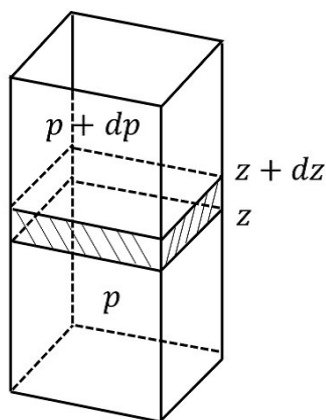


図 1 大気中の単位面積を底とする鉛直な気柱

- 1-3. 大気中で、熱の出入りがない小さな気塊（気圧  $p$ 、温度  $T$ ）を準静的に上昇させた場合を考える。大気は 1-2 で示された静力学平衡状態にあり、理想気体の状態方程式（気体定数  $R$ ）が成り立つとする。熱力学第一法則（ $dQ = C_v dT + p dV$ ,  $Q$ : 熱量,  $C_v$ : 定積モル比熱,  $V$ : 1 モルあたりの体積）を適用し、1 モルあたりの大気質量  $\mu$ 、重力加速度  $g$ 、定圧モル比熱  $C_p$  を用いて温度減率を表せ。

- 1-4. 太陽放射  $F$  と地面からの赤外放射  $F_g$  の一部を吸収し、それ自体も赤外放射  $F_a$  を宇宙空間と地面に向けてそれぞれ射出する温度一定の大気層が惑星に存在する場合を考える。太陽放射に対する大気層の透過率を  $\tau_S$ 、地面からの赤外放射に対する大気層の透過率を  $\tau_L$  とする。地面と大気層の温度をそれぞれ  $T_g, T_a$  とする時、放射による熱収支を図2に書き加える形で図示せよ。ただし、図は解答用紙に描くこと。さらに、地面と大気上端における放射平衡の式をそれぞれ立てよ。



図2 放射による熱収支

- 1-5. 1-4 で立てた放射平衡の式を解き、 $T_g$  と  $T_a$  を放射平衡温度  $T_e$ ,  $\tau_S$ ,  $\tau_L$  を用いて表せ。地面は黒体とし、大気による反射・散乱過程は無視する。大気層の射出率は  $1 - \tau_L$  と近似せよ。

問 2 以下の問に答えよ。

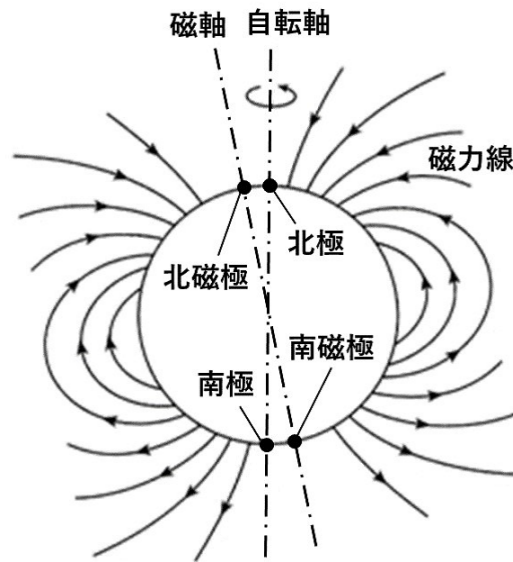


図 3 地球磁場の概念図

- 2-1. 図 3 に示すように、地球の磁場は、自転軸から約 10 度傾いた磁気双極子モーメント  $M$  を地球中心においた磁場で近似できる。地球中心を原点とし、位置ベクトル  $\mathbf{r}$  ( $|\mathbf{r}| = r$ ) で表される任意の点 P における双極子磁場ポテンシャル  $V$  は  $V = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$  と表される。点 P の地磁気緯度が  $\theta$  (磁気双極子モーメント  $M$  に垂直な面と位置ベクトル  $\mathbf{r}$  がなす角)、磁気双極子モーメントの大きさが  $M$  である時、双極子磁場ポテンシャル  $V$  を  $\theta$  の関数として表せ。
- 2-2. 2-1 で求めた双極子磁場ポテンシャル  $V$  の勾配をとることにより、地球磁場の水平成分  $B_\theta$  と鉛直成分  $B_r$  を書き下せ。
- 2-3. 2-2 で求めた両成分を用いて磁束密度の大きさ  $B$  を求めよ。
- 2-4. 惑星間空間には、300~800 km/s の太陽風が吹き、太陽風の動圧で地球磁場が押し込められることにより、地球磁気圏が形成される。電磁流体における運動方程式は、

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (1)$$

(ただし、 $\rho$ : 密度,  $\mathbf{v}$ : 速度 ( $|\mathbf{v}| = v$ ),  $\mathbf{j}$ : 電流密度,  $\mathbf{B}$ : 磁束密度,  $p$ : 圧力) である。 $\mathbf{j} = \text{rot} \mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  ( $\mathbf{H}$ : 磁場,  $\mu_0$ : 真空の透磁率) を用いて右辺を変形すると、

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p = -\nabla \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla p \quad (2)$$

となることを示せ。

2-5. 式 (2) を用いて電磁流体における運動方程式 (1) を変形すると、

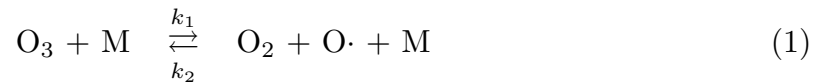
$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \left( \rho v^2 + p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

となる。ここで、地球磁場が太陽風速度に垂直で定常的な状態を仮定すると、 $\rho v^2 + p + \frac{B^2}{2\mu_0}$  が一定とみなせる。地球磁気圏境界面は、太陽風側の動圧  $\rho v^2$  と、地球側の磁気圧  $\frac{B^2}{2\mu_0}$  が釣り合う位置に形成されるが、この圧力のつり合いと 2-3 を用いて、磁気赤道における磁気圏境界の地球中心からの距離  $r$  を式で表せ。

## 問題 VII

以下の問に答えよ。

問 1 オゾンガス  $O_3$  の熱分解反応 (式 (1) および式 (2)) について考える。



ここで、 $k_1 \sim k_3$  は各素反応の速度定数を、 $O\cdot$  は酸素ラジカルを、そして  $M$  は系内の他の気体分子を示す。 $O_3$ ,  $M$ ,  $O_2$ ,  $O\cdot$  の濃度をそれぞれ  $[O_3]$ ,  $[M]$ ,  $[O_2]$ ,  $[O\cdot]$  とする。以下の問に、速度定数  $k_1 \sim k_3$ ,  $[O_3]$ ,  $[M]$ ,  $[O_2]$ ,  $[O\cdot]$  のうち必要なものを用いて答えよ。

- 1-1. 反応式 (1) および (2) より、反応物  $O_3$  の正味の分解速度  $d[O_3]/dt$  を示せ。ここで、 $t$  は時間を示す。
- 1-2.  $O\cdot$  の正味の生成速度  $d[O\cdot]/dt$  を示せ。
- 1-3.  $O\cdot$  は活性が高い化学種であるため、系内には常にごく少量しか存在しない。そのため、 $O\cdot$  については定常状態を仮定できる。これより、 $[O\cdot]$  を求めよ。
- 1-4. 1-3 で得た  $[O\cdot]$  を用いて、 $d[O_3]/dt$  の  $[O_3]$ ,  $[O_2]$ ,  $[M]$  に対する依存性を示せ。
- 1-5.  $O_2$  が多量に存在し、かつ  $O_3$  がごくわずかしかな存在しない場合には、 $d[O_3]/dt$  は  $[O_3]$  および  $[O_2]$  の何次に比例するかを示せ。
- 1-6. 逆に、 $O_2$  がごくわずかしかな存在せず、かつ  $O_3$  が多量に存在する場合には、 $d[O_3]/dt$  は  $[O_3]$  および  $[O_2]$  の何次に比例するかを示せ。

**問 2** 水 (液体) 中に気泡が存在する際の力の釣り合いについて考える (図 1)。気泡の半径を  $r$ 、表面積を  $A$ 、体積を  $V$  とする。また、気泡中のガスは水蒸気のみとしその水蒸気圧を  $P_{\text{in}}$ 、そして水が気泡を押し圧力を  $P_{\text{out}}$  (1 気圧で一定) とする。気泡が安定に存在するためには、気泡が外側に膨らもうとする力  $AP_{\text{in}}$  が、気泡を押しつぶそうとする力 (外圧による力  $AP_{\text{out}}$  と表面張力に由来する力  $X$  の和で与えられる) と釣り合う必要がある (式 (3))。

$$AP_{\text{in}} = AP_{\text{out}} + X \quad (3)$$

まず、表面張力に由来する力  $X$  の正体について考える。そのためには、気泡の表面を微小半径  $dr$  だけ引き延ばすための仕事を考えれば良い。気泡の表面張力 (表面自由エネルギーに等しい) は  $\gamma$  [N/m] = [J/m<sup>2</sup>] で与えられ、 $\gamma$  は気泡の半径  $r$  や温度  $T$  にはよらない定数とする。また、気泡中の水蒸気は理想気体とする。

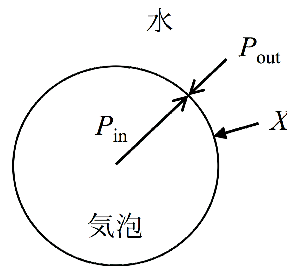


図 1 気泡内外の圧力と表面張力に基づく力

- 2-1. 気泡の面積が微小量  $dA$  だけ変化する際の、気泡の表面エネルギー ([Nm] = [J]) の変化量を示せ。
- 2-2. 力  $X$  に逆らって半径が  $dr$  だけ変化する際の仕事を求めよ。
- 2-3. 2-1 で求めた表面エネルギーの変化量は、2-2 で求めた仕事と等しい。力  $X$  を半径  $r$  の関数として求めよ。
- 2-4. 2-3 で求めた力  $X$  を式 (3) に代入し、 $P_{\text{in}}$  と  $P_{\text{out}}$  の関係を求めよ。この関係はラプラスの式と呼ばれ、気泡が安定に存在するための力学的な条件を示す。
- 2-5. 気泡が安定に存在するためには、力  $X$  に打ち勝つために、 $P_{\text{in}}$  の方が  $P_{\text{out}}$  よりも大きくなければならない。すなわち、 $\Delta P = P_{\text{out}} - P_{\text{in}}$  とすると、気泡は外部の水に対して仕事  $\Delta W = \Delta P \cdot V$  をせねばならない。このための仕事  $\Delta W$  を  $\gamma$ ,  $r$ , 気泡中の水分子の数  $n$ , および気泡中の水 1 分子の体積  $\Omega$  を用いて示せ。
- 2-6. 気泡中の水 1 分子の化学ポテンシャル  $\mu(r)$  は、平坦 (半径  $r = \infty$ ) な水蒸気-水界面での水 1 分子の化学ポテンシャル  $\mu(\infty)$  と、水 1 分子が行った仕事  $\Delta W/n$  を用いて、 $\mu(r) = \mu(\infty) + \Delta W/n$  と表される (これは Gibbs-Thomson の式と呼ばれる)。また、一般的に理想気体の化学ポテンシャルは圧力  $P$  を用いて  $\mu = kT \ln P$  と表される。ただし、 $k$  はボルツマン定数を、そして  $T$  は絶対温度を示す。これらの関係より、 $P(r)$  と  $P(\infty)$  の関係を示せ。



2-7. 気泡が安定に存在するための力学的条件 (2-4 の解) と、気泡中の水蒸気圧  $P(r)$  (2-6 の解) の関係について考える。力学的条件は、図 2 の曲線 A で示した様に、外気圧 (1 気圧) のみによって定まり、温度には依存しない。一方、 $P(r)$  は温度とともに増加し ( $P(\infty)$  が増加するため)、 $100^{\circ}\text{C}$  では図 2 の曲線 B で示した様に、 $r = \infty$  において曲線 A と接する。すなわち、温度が  $100^{\circ}\text{C}$  の時には、 $r = \infty$  の気泡がようやく生成 (沸騰) を許される。そして、系をさらに加熱すると過加熱が起こり、水温が  $100^{\circ}\text{C}$  よりも上昇するため、有限長さの半径をもつ気泡が生成できる様になる。水温が  $100^{\circ}\text{C}$  よりも大きな場合の曲線 A と B の関係を図示し、生成できる最小の気泡の半径を図中に示せ (この最小の半径は、臨界核半径と呼ばれる)。ただし、図は解答用紙に描くこと。

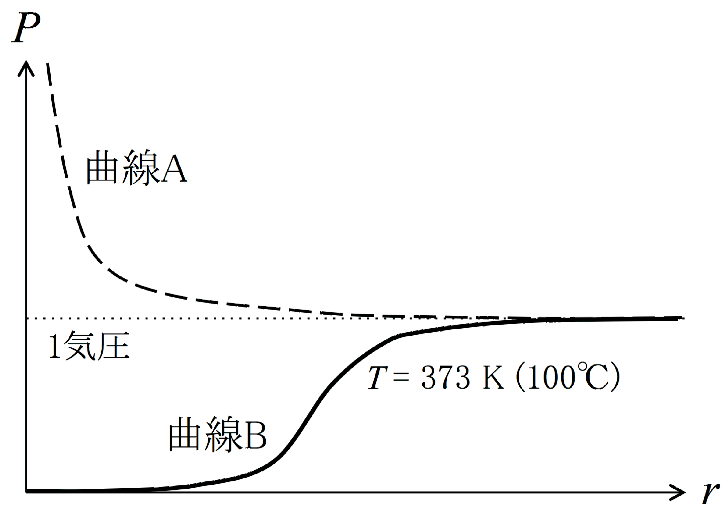


図 2 曲線 A と曲線 B の関係